

УДК 616. 07:519.248

# ОБОБЩЕННЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНИВАНИЮ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ЧАСТЬ 2.\* СТАТИСТИЧЕСКИЙ ИНСТРУМЕНТАРИЙ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ РЕГУЛИРУЕМОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

## Generalized Approach to the Estimation of Statistical Controllability of the Technological Process. Part 2. Statistical Toolkit for Assessing Controllability of Technological Process

**Л. Кошечая**, доктор технических наук, профессор,  
Национальный авиационный университет, г. Киев,  
e-mail: l.kosh@ukr.net

**М. Клевцова**, директор ООО «Фабрика «Свитязь»,  
соискатель,  
Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт имени Игоря  
Сикорского»

**L. Kosheva**, Doctor of Technical Science, Professor,  
National Aviation University, Kiev,  
e-mail: l.kosh@ukr.net

**M. Klevtsova**, Director of «Svitiaz Factory» Ltd,  
aspirant,  
National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky  
Kyiv Polytechnic Institute»

*Продолжено рассмотрение возможности достичь состояния управляемости технологического процесса с применением статистического подхода. С использованием биномиального распределения показателей процесса выявлены дополнительные критерии особых причин его разлаженности. Показана необходимость в дополнительном оценивании случайности и стационарности контролируемых показателей.*

*The article continues consideration of the possibility to achieve the state of controllability of the technological process with the use of a statistical approach. With using the binomial distribution of process indicators identified additional criteria of special reasons for its dysfunction. Shown the need for additional estimation of the randomness and stationarity of the monitored indicators.*

**Ключевые слова:** качество технологического процесса, статистические методы, контрольные карты, предупредительные границы, критерии.

**Keywords:** quality of the technological process, statistical methods, control charts, precautionary limits, criteria.

При статистическом управлении технологическим процессом проблемой малых предприятий является недостаточность статистического материала по причинам частой смены номенклатуры изделий, малых партий их изготовления, значительной части ручного труда, отсутствия специалистов, занимающихся только отлаженностью технического процесса производства. Поэтому для малых предприятий необходимо предоставить такой статистический инструментарий, применение которого позволило бы специалистам предприятия оптимизировать процесс контроля, применяя для этого эффективные методы, основанные на статистическом подходе. К таким методам можно отнести действенный инструмент — контрольные карты с установленным набором дополнительных критериев обнаружения малых и медленно нарастающих отклонений технологического процесса.

При условии нормальности показателей протекания процесса описаны некоторые критерии идентификации особых причин его разлаженности, которую можно установить на начальной его стадии [1]. Однако, недостаточным будет принимать решение только на основании анализа этих критериев, необходимо специалиста вооружить дополнительным статистическим инструментарием для правильной оценки



Л. Кошечая



М. Клевцова

\* см. часть 1 статьи в журнале «Метрологія та прилади» № 1 за 2018 год.

риска излишней наложенности и/или незамеченной разложенности процесса [2] и принятия соответствующего решения.

С этой целью рассмотрено применение биномиального закона распределения, который дает возможность проанализировать ситуации более детально и обнаружить дополнительные критерии.

## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

### Применение биномиального закона для анализа критериев

Свидетельством разложенности процесса на начальной стадии является наличие некоторой последовательности точек, находящейся в определенной области контрольной карты. Из теории известно [3], что вероятность  $p_n(x)$  ровно  $x$  раз наблюдать событие  $A$  в течение  $n$  испытаний определяется как:

$$p_n(x) C_n^x p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{x!} p^x q^{n-x} \quad (1)$$

Формула (1) описывает закон биномиального распределения. Известное правило умножения вероятностей независимых событий

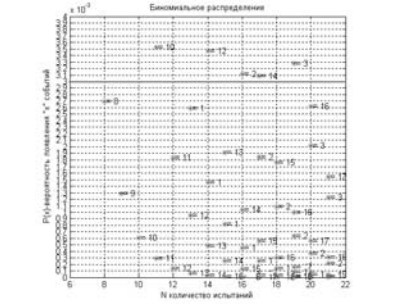
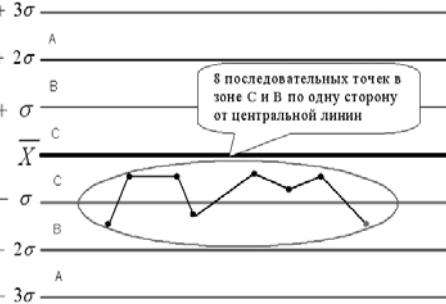
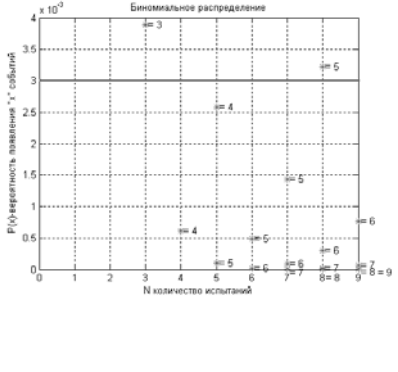
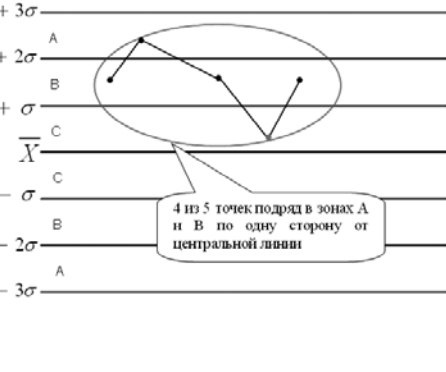
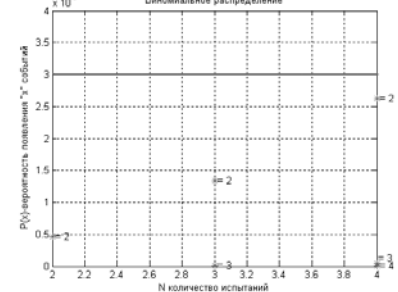
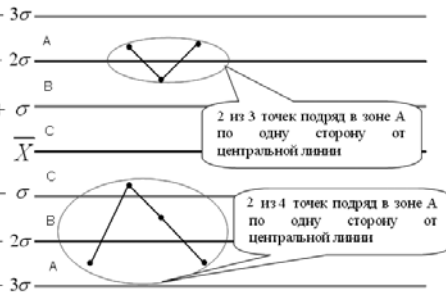
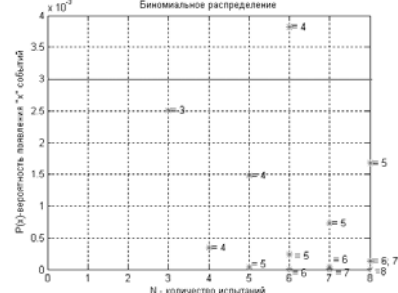
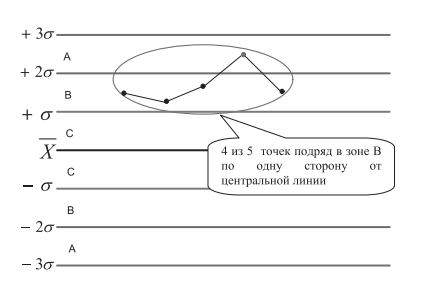
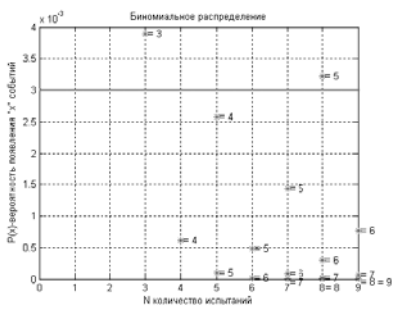
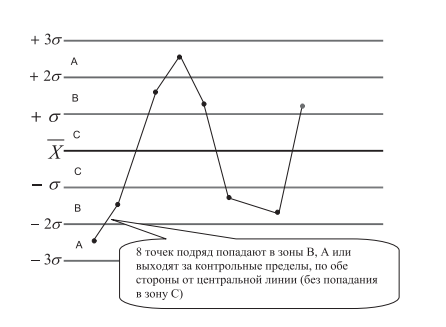
$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n) \quad (2)$$

является частным случаем биномиального закона при условии принятия в (1) числа испытаний, равным числу положительных исходов, т.е.  $n = x$ . Рассмотрим последовательно все возможные ситуации, которые могут свидетельствовать о нарушении процесса, и проанализируем их, исходя из биномиального закона. Результаты исследований для наглядности сведены в табл. 1.

Таблица 1. Графическая интерпретация критериев, обоснованных биномиальным законом распределения  
Table 1. Graphical interpretation of the criteria justified by the binomial distribution law

Значение вероятности	График зависимости вероятности от числа наблюдений	Вид контрольной карты
11 точек из 12 подряд будут находиться по одну сторону от $\bar{X}$ ; $p = 0,0029$		
1 точка из 8 подряд будет находиться по одну сторону от $\bar{X}$ в зоне C; $p = 0,0018$		
7 точек из 8 подряд будут находиться по одну сторону от $\bar{X}$ в зоне C; $p = 0,0028$		

Продолжение таблицы 1  
Table 1 continuation

Значение вероятности	График зависимости вероятности от числа наблюдений	Вид контрольной карты
<p>8 точек подряд будут находиться по одну сторону от <math>\bar{X}</math> в зонах B и C;  <math>p = 0,0027</math></p>		 <p>8 последовательных точек в зоне C и B по одну сторону от центральной линии</p>
<p>4 точки из 5 подряд будут находиться по одну сторону от <math>\bar{X}</math> в зонах B и A;  <math>p = 0,0026</math>.  <i>*Присутствует положительное (тренд находится выше <math>\bar{X}</math>) или отрицательное (ниже <math>\bar{X}</math>) систематическое смещение</i></p>		 <p>4 из 5 точек подряд в зонах A и B по одну сторону от центральной линии</p>
<p>2 точки из 3 подряд будут находиться по одну сторону от <math>\bar{X}</math> в зоне A;  <math>p = 0,0013</math>.          2 точки из 4 подряд будут находиться по одну сторону от <math>\bar{X}</math> в зоне A;  <math>p = 0,0026</math></p>		 <p>2 из 3 точек подряд в зоне A по одну сторону от центральной линии</p> <p>2 из 4 точек подряд в зоне A по одну сторону от центральной линии</p>
<p>4 точки из 5 подряд будут находиться по одну сторону от <math>\bar{X}</math> в зоне B;  <math>p = 0,0015</math></p>		 <p>4 из 5 точек подряд в зоне B по одну сторону от центральной линии</p>
<p>8 точек подряд попадают в зоны B, A или выходят за контрольные пределы, по обе стороны от <math>\bar{X}</math> (без попадания в C);  <math>p = 0,0012</math>  <i>* Наблюдается бимодальность распределения</i></p>		 <p>8 точек подряд попадают в зоны B, A или выходят за контрольные пределы, по обе стороны от центральной линии (без попадания в зону C)</p>

Анализ данных позволил выделить критические ситуации, при которых вероятности появления последовательности точек, находящихся в пределах контрольных границ, будут меньше 0,0027 (табл. 2). Появление такой ситуации свидетельствует о наличии систематического воздействия, приводящего к разлаженности процесса и необходимости его управления.

Из всех приведенных в табл. 2 критериев в качестве основного предлагается выбрать первый как наиболее оперативный, который сразу же свидетельствует о разлаженности технологического процесса. Однако, при проведении контроля оператор должен обращать внимание на все комбинации, приведенные в табл. 2. Остальные критерии, которые могут быть полезными при контроле технологического процесса, приведены в табл. 3 и 4.

Попадание в критическую область (в зоны А, В без попадания в зону С) последовательности из 8 точек или их выход за контрольные пределы по обе стороны от центральной линии свидетельствует о том, что различные выборки подвержены влиянию различных факторов, в результате чего выборочные значения оказываются распределенными по бимодальному закону. Бимодальность распределения выборки свидетельствует о том, что распределение не является нормальным, то есть можно предположить действие особой причины. Бимодальность распределения дает важ-

ную информацию о природе исследуемой переменной. Например, это может свидетельствовать о том, что выборка не является однородной и наблюдения порождены двумя или более «наложенными» распределениями или выбранные инструменты не подходят для контроля (например, «проблемы разметки»).

Как показал анализ, с помощью биномиального закона распределения можно к описанным ранее [1], дополнительно установить особые причины, которые характеризуют разлаженность процесса. Поскольку анализ таких причин делается при использовании только двух статистических инструментов: контрольной карты, с представленными на ней вероятностными границами, и уравнения биномиального закона распределения, — то оператору будет гораздо проще контролировать производственный процесс.

С помощью полученных текущих значений у оператора есть возможность регулировать контрольные границы и на протяжении более длительного времени поддерживать процесс в состоянии статистической управляемости, а также определить гораздо больше ситуаций, которые свидетельствуют о реальных изменениях процесса.

#### Проверка случайности и стационарности ряда наблюдений

Основная идея карт Шухарта состоит в разделении влияния случайных и неслучайных влияющих

Таблица 2. Вероятность, что  $x$  точек из  $N$  последовательных будут находиться по обе стороны от  $\bar{X}$  в зоне С

Table 2. The probability that  $x$  points of  $N$  consecutive will be on both sides of the  $\bar{X}$  zone C

Количество последовательных точек	8	10	12	14	16	16
Из них в зоне С	1	2	3	4	5	16
Вероятность	0.0018	0.0022	0.0023	0.0023	0.0021	0.0022

Таблица 3. Вероятность, что  $x$  точек из  $N$  последовательных будут находиться по обе стороны от  $\bar{X}$  в зонах В и С

Table 3. The probability that  $x$  points of  $N$  consecutive will be on both sides of the  $\bar{X}$  zones B and C

Количество последовательных точек	8	12	13	14	15	16
Из них в зонах В и С	8	11	1	1	13	2
Вероятность	0.0027	0.0018	0.00236	0.0015	0.0019	0.0031

Таблица 4. Вероятность, что  $x$  точек из  $N$  последовательных будут находиться по одну сторону от  $\bar{X}$  в зоне В

Table 4. The probability that  $x$  points of  $N$  consecutive will be on the same side of  $\bar{X}$  in zone B

Количество последовательных точек	3	5	8
Из них в зоне В	3	4	5
Вероятность	0.0025	0.0015	0.0017



величин. Для этого используется статистическая теория проверки гипотез. Однако, влияние неслучайных/систематических величин, в отличие от случайных, проявляется постепенно в изменении параметров закона распределения во времени. В этом случае статистическое управление процессом не может быть применено [4]. Необходимо искать иные подходы, которые позволят выявить, так называемые, особые нестатистические причины разлаженности процесса на начальном этапе. Количество возможных ситуаций, в которых выявление тренда (закономерности, а не случайности появления ряда данных) дает практически полезную информацию, велико, поэтому возникает необходимость выявления подходящего критерия установления тренда в зависимости от практической задачи.

Выбор подходящего способа идентификации неслучайных отклонений зависит от многих факторов: объема накопленных данных, желаемой точности технологического процесса, времени и стоимости реализации подходящего способа. Кроме того, способы обнаружения систематических смещений различаются в зависимости от существенности влияния случайных величин. При условии, что случайная влияющая величина незначительна, систематическую величину можно обнаружить по чередованию знаков отклонений от среднего арифметического значения. Если же случайная влияющая величина существенна, то для обнаружения систематического смещения используют критерии проверки случайности выборочных значений и стационарности выборки, например, критерий «восходящих» и «нисходящих» серий [4–6]. Этот критерий «улавливает» постепенное смещение (по ходу выборочного обследования) среднего значения в исследуемом распределении не только монотонного, но и более общего, например, периодического характера. Данный критерий основывается на исследовании последовательности знаков — «плюсов» и «минусов». Исходным пунктом является последовательность результатов наблюдения — выборка  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , на  $x_i$ -м месте, которой ставится знак «плюс», если  $x_{i+1} - x_i > 0$ , и «минус», если  $x_{i+1} - x_i < 0$ . Последовательность подряд идущих «плюсов» будет соответствовать возрастанию результатов наблюдения (восходящая серия), а последовательность «минусов» — их убыванию (нисходящая серия). Критерий основан на принципе: если выборка случайна (наблюдения независимы), то в образованной последовательности знаков общее число серий не может быть слишком малым, а их протяженность (в количестве подряд идущих «плюсов» или «мину-

сов») — слишком большой. В частности, при уровне значимости  $0,05 < \alpha < 0,0975$  количественное выражение этого правила примет вид:

$$v(n) > \left[ \frac{1}{3}(2n-1) - 1,96\sqrt{(16n-29)/90} \right], \quad (3)$$

$$\tau(n) < \tau_0(n), \quad (4)$$

где  $v(n)$  — общее число серий;  $\tau(n)$  — протяженность самой длинной серии (количество подряд идущих «плюсов» или «минусов» в самой длинной серии);  $n$  — количество значений в выборке.

Если хотя бы одно из неравенств (3) или (4) окажется нарушенным, то гипотезу о случайности выборки следует отвергнуть и принять гипотезу о наличии систематического смещения.

При помощи данного критерия можно обосновать ранее обнаруженную эмпирическим путем особую причину, которая свидетельствует о нарушении процесса: шесть возрастающих или убывающих точек подряд на контрольной карте (критерий 3 в [7]). В этом случае на графике будут две последовательности: вида  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+5}$  из шести возрастающих точек и вида  $x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+5}$  из шести убывающих точек подряд. Длина серий для этих выборок будет  $\tau(n) = 5$ , при этом  $n$  — количество членов выборки не будет превышать 20. Это свидетельствует о том, что неравенство (4) не выполняется, значит, гипотезу о случайности выборки следует отвергнуть и принять гипотезу о наличии систематического смещения.

Анализ еще двух критериев: критерия серий, основанного на медиане выборки, и критерия квадратов последовательных разностей (критерия Аббе), — [4, 5, 8] показал, что для обнаружения систематических смещений необходимо довольно большое число экспериментальных точек  $n$ . Поскольку речь идет о малых выборках (нет возможности получить требуемое количество наблюдений), то применение этих критериев весьма проблематично.

Рассмотрим возможности теста серий Вальда-Вольфовица [9, 10], который используется для проверки гипотезы об отсутствии однородности в последовательности наблюдений для случая с малыми выборками. Данный критерий также основывается на исследовании последовательности знаков — «плюсов» и «минусов». Основу для данного критерия составляет количество серий, которое может наблюдаться в выборке в зависимости от ее размера. Исходным является последовательность результатов наблюдений — выборка  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , представленная в виде возрастающего вариационного ряда. Основой для данного критерия является медиана, которую находят как средний элемент вариационного

Таблица 5. Тесты серий Вальда-Вольфовица

Table 5. Tests of the Wald-Wolfowitz series

Количество серий знаков	Графический тест серий	Вид контрольной карты
Минимальное количество серий в выборке (нижняя граница). *Пример тренда, когда еще не «видно» систематического смещения		
Максимальное количество серий в выборке (верхняя граница). *Действие двух систематически изменяющихся причин, которое приводит к получению различных результатов		

ряда. Если в выборке последовательности «плюсов» и «минусов» распределены случайно, то количество серий является случайным значением и определяется исходя из их математического ожидания

$$\mu = 2N_+N_- / (N_+ + N_-) + 1, \quad (5)$$

где  $N_+$  — количество серий со знаком «+»;  $N_-$  — количество серий со знаком «-», и дисперсии

$$\sigma^2 = \frac{2N_+N_- (2N_+N_- - N_+ - N_-)}{(N_+ + N_-)^2 (N_+ + N_- - 1)} = \frac{(\mu - 1)(\mu - 2)}{(N_+ + N_- - 1)}. \quad (6)$$

Граничные значения количества серий определяются из выражений:

$$r_{gran\ up} = \mu + t\sqrt{\sigma^2}; \quad r_{gran\ l} = \mu - t\sqrt{\sigma^2}, \quad (7)$$

где  $\sigma^2$  — дисперсия, которая определяется из выражения (6);  $t_{1-\alpha} = 2,7478$  — квантиль стандартного нормального закона распределения для вероятности

$$P = 1 - \alpha = 0.997 \text{ [11]}.$$

Графики, приведенные в табл. 5, позволяют проанализировать максимальное количество возможных экспериментальных ситуаций.

Одной из основных предпосылок применения многих критериев является предположение о принадлежности анализируемых данных нормальному закону. Тем не менее, на практике такое предположение достаточно часто нарушается. Для многих статистических критериев нарушение предположения о нормальности приводит к существенным изменениям в законе распределения статистики критерия. Непараметрический критерий се-

рий Вальда-Вольфовица является нечувствительным к отклонениям анализируемых данных от нормального закона. Мощность критерия позволяет обнаруживать наличие линейного и нелинейного трендов в среднем или в характеристиках рассеяния [9].

Таким образом, с помощью критерия «восходящих» и «нисходящих» серий и теста Вальда-Вольфовица можно обнаружить систематическое смещение исследуемых параметров, что свидетельствует о нарушении технологического процесса, а значит, дальнейший анализ на идентификацию «особых» причин нецелесообразен.


## ВЫВОДЫ

При проведении анализа возможных ситуаций, которые могут свидетельствовать о разлаженности процесса и выходу его из состояния статистической управляемости, найдены и обоснованы основные критерии, позволяющие идентифицировать особые причины разлаженности производственного процесса. Так, анализ биномиального распределения, позволяет не только выявить особые причины разлаженности процесса, но и с помощью полученных текущих значений регулировать контрольные границы, на протяжении более длительного времени поддерживать процесс в состоянии статистической управляемости, обеспечивать стабильное среднее значение измеряемой характеристики.

Показано, что при помощи биномиального закона распределения, критерия «восходящих» и «нисходящих» серий и теста Вальда-Вольфовица возможно выявить новые особые ситуации, которые свидетельствуют о разлаженности процесса.

Данный статистический инструментарий дает возможность более глубоко изучить характер процесса и, впоследствии, может быть положен в основу метода контроля качества технологического процесса.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

1. Кошечая Л.А., Клевцова М.А. Обобщенный подход к оцениванию статистической управляемости технологического процесса. Часть 1. Статистическое обоснование критериев разлаженности технологического процесса / Метрологія та прилади (Koshevaya L.A., Klevtsova M.A. Obobshchenny podkhod kotsenivaniy ustatisticheskoy upravlyayemosti tekhnologicheskogo protsessa Chast' 1. Statisticheskoye obosnovaniye kriteriyev razlazhenosti tekhnologicheskogo protsessa / Metrologiya ta priladi). — 2018. — №1.— С/С 40—45.
2. ДСТУ 3514-97 Державний стандарт України. Статистичні методи контролю та регулювання. Терміни та визначення. — [Електронний ресурс]. — Режим доступу (DSTU 3514-97 Derzhavniy standart Ukraini. Statistichni metodi kontrolyu ta reguluvannya. Terminy ta vyznachennya. — [YElektronniy resurs]. — Rezhim dostupu) <http://metrology.com.ua/download/dstu-gost-gost-r/60-dstu/489-dstu-3514-97>.
3. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Физматлит (Kremer N.Sh. Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika. — М.: Fizmatlit). — 2007. — 551 с/с.
4. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. — М.: Физматлит (Kobzar' A.I. Prikladnaya matematicheskaya statistika. — М.: Fizmatlit). — 2006. — 816 с/с.
5. Айвазян С.А. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. Справочное изд. / С.А. Айвазян, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. — М.: Финансы и статистика (Ayvazyan S.A. Prikladnaya statistika: Osnovy modelirovaniya i pervichnaya obrabotka dannykh. Spravochnoye izd. / S.A. Ayvazyan, I.S. Yenyukov, L.D. Meshalkin. — М.: Finansy i statistika). — 1983. — 471с/с.
6. Садовникова Н.А., Шмойлова Р.А. Анализ временных рядов и прогнозирование. — М.: Синергия (Sadovnikova N.A., Shmoylova R.A. Analiz vremennykh ryadov i prognozirovaniye. — М.: Sinergiya). — 2016. — 152 с/с.
7. ДСТУ ISO 8258-2001. Статистичний контроль. Контрольні карти Шухарта: (ISO 8258:1991, IOT) К.: Держспоживстандарт України (DSTU ISO 8258-2001. Statistichniy kontrol'. Kontrol'ni karti Shukharta: (ISO 8258:1991, IOT) К.: Derzhspozhivstandart Ukraini). — 2003.
8. Лемешко С.Б. Критерий независимости Аббе при нарушении предположений нормальности // Измерительная техника (Lemeshko S.B. Kriteriy nezavisimosti Abbe pri narushenii predpolozheniy normal'nosti // Izmeritel'naya tekhnika). — 2006. — № 10. — С/С. 9—14.
9. Лемешко Б.Ю., Комиссарова А.С., Щерлов А.Е. Применение некоторых критериев проверки гипотез случайности и отсутствия тренда // Метрологія (Lemeshko B.Yu., Komissarova A.S., Shcheglov A.YE. Primeneniye nekotorykh kriteriyev proverki gipotez sluchaynosti i otsutstviya trenda // Metrologiya). — 2010. — № 12. — С/С. 3—25.
10. Bonnini S., Corain L., Marozzi M., Salmaso S. Non parametric Hypothesis Testing: Rank and Permutation Methods with Applications in R. — Hoboken: John Wiley & Sons, (2014).
11. Большев Л.Н. Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов — М.: Наука (Bol'shev L.N. Tablitsy matematicheskoy statistiki / L.N. Bol'shev, N.V. Smirnov — М.: Nauka). — 1983. — 416 с/с. 

Отримано / received: 21.01.2018.

Стаття рекомендована до публікації д.т.н., проф. Н.І. Косач (Україна).  
Prof. N.I. Kosach, D. Sc. (Techn.), Ukraine, recommended this article to be published.